

А.В. Попорелов

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ
ОБОЛОЧКИ
ПРИ
ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ**

*Г.Осевое
сжатие*

*Издательство
Харьковского Университета*



А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ
ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ

1. ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

Сканировал и обрабатывал

Лукин А.О.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Х а р ь к о в 1962

Работа содержит исследование упругого состояния сжатых цилиндрических оболочек при за- критических деформациях, в частности вопроса о величине нижней критической нагрузки. Она может быть полезна для инженеров-конструкторов, студентов-механиков и геометров, научных работников в области теории оболочек.

Ответственный редактор профессор *Я. П. Бланк*



§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этом параграфе мы кратко изложим содержание предлагаемой работы.

1. Постановка вопроса

Среди оболочек, встречающихся в реальных конструкциях, наиболее распространенными являются оболочки, имеющие форму разворачивающихся поверхностей. Объясняется это простотой их получения из листового материала. Среди разворачивающихся оболочек, пожалуй, чаще всего встречаются цилиндрические.

Цилиндрическая оболочка как элемент конструкции может работать в различных условиях нагружения. Очень часто она воспринимает осевую нагрузку.

Опытом установлено, что цилиндрическая оболочка, находящаяся в условиях осевого сжатия, разрушается задолго до того, как напряжения, определяемые при условии сохранения цилиндрической формы, достигают предела прочности материала. Причина в том, что при некоторой величине p_k сжимающего усилия теряется устойчивость цилиндрической формы, в результате происходит перераспределение напряжений, и в отдельных местах они достигают разрушающих значений.

В связи с этим естественно в практических расчетах оболочек ориентироваться на величину p_k . К сожалению, эта величина зависит от многих факторов, значительно снижающих полученное для нее теоретическое значение. Среди этих факторов особенно существенна начальная погрешь (несовершенство формы).

Процесс перехода в закритическое упругое состояние сжатой цилиндрической оболочки происходит мгновенно

(оболочка хлопает), причем воспринимаемая ею нагрузка резко снижается до некоторой величины p_k^* , которую обычно называют нижней критической нагрузкой, в отличие от величины p_k — верхней критической нагрузки. Нижняя критическая нагрузка более стабильна. Поэтому при расчете цилиндрических оболочек, подверженных осевому сжатию, ориентируются обычно на величину p_k^* .

Определению величины нижней критической нагрузки посвящено много экспериментальных и теоретических исследований*. Проблема эта довольно трудная и пока, как нам кажется, не получила удовлетворительного разрешения. Трудность заключается в том, что оболочка после хлопка имеет форму, далекую от первоначальной, и регулярное приближение этой формы весьма затруднительно. Это во-первых. А во-вторых, как показывают результаты экспериментальных исследований, в практически важных случаях соотношения толщины и диаметра оболочки рассмотрение должно вестись с учетом пластических деформаций, возникающих при хлопке.

Настоящая работа посвящена исследованию закритического упругого состояния сжатой цилиндрической оболочки. Мы хотим дать качественное описание процесса перехода оболочки в закритическое упругое состояние и определить величину нижней критической нагрузки.

2. Метод исследования

Мы полагаем, что деформация срединной поверхности сжатой цилиндрической оболочки при переходе в закритическое упругое состояние представляет собой в основном геометрическое изгибание. В связи с этим форму поверхности при такой деформации мы приближаем поверхностью Z изометричной исходной.

Поверхность Z , описание которой содержится в § 3, обладает периодичностью строения в двух направлениях и имеет особые линии (гребни), разделяющие регулярные куски. Характер периодичности поверхности Z определяется двумя параметрами m и n , а форма регулярной части задается некоторой периодической функцией $y(x)$.

* Обширная библиография по этому вопросу приведена в кн. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.

Энергия изгиба оболочки при закритической деформации U условно разбивается на две части: U_γ и U_Δ . U_γ — это энергия, обусловленная сильным местным изгибом вдоль гребней γ , а U_Δ — энергия изгиба остальной части поверхности оболочки. Энергия U_Δ определяется обычным образом, то есть деформацией изгиба исходной поверхности в поверхность Z . Для определения энергии местного изгиба мы пользуемся формулой, которая получена в предыдущей работе автора*.

Функция $y(x)$, определяющая форму деформированной оболочки, при заданном характере волнообразования (числа m и n) находится из условия минимума функционала $U(y)$ при фиксированном осевом сжатии оболочки, что математически выражается в форме некоторой интегральной связи для функции y .

Таким образом, энергия упругой деформации оболочки получается в зависимости от осевого сжатия h и двух параметров, характеризующих общую периодическую структуру.

Мы исходим из предположения о том, что в процессе перехода к закритическому упругому состоянию, то есть во время хлопка, характер периодичности строения формы поверхности оболочки сохраняется, а следовательно, остается таким же, как и в момент потери устойчивости. Но параметры, характеризующие волнообразование в момент потери устойчивости, не произвольны. Они связаны известным соотношением. Это позволяет в выражении U исключить один параметр, и энергия U становится функцией осевого сжатия и параметра ξ , представляющего собой, грубо говоря, отношение размеров вмятины на поверхности оболочки после хлопка.

Когда энергия упругой деформации оболочки найдена, дальнейшее исследование проводится обычным способом.

3. Основные результаты

1. Закритические упругие состояния равновесия сжатой цилиндрической оболочки при относительно малом осевом сжатии являются неустойчивыми. Этот теоретически устанавливаемый факт согласуется с эксперимен-

* А. В. Погорелов. Теория выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Изд-во ХГУ, 1960.

тальными данными о характере перехода оболочки в закритическое упругое состояние с хлопком.

2. Если предположить, что характер периодичности формы поверхности оболочки сохраняется во все время закритической деформации, то переход в устойчивое закритическое состояние возможен только при значении параметра $\xi < 0,91$. При этом наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка, отвечающая устойчивым состояниям равновесия, то есть нижняя критическая нагрузка, определяется по формуле

$$p_k^* = 0,15 E \frac{\delta}{R}$$

(δ — толщина оболочки, R — радиус, E — модуль упругости).

3. Если в момент потери устойчивости значение параметра $\xi > 0,91$, то переход оболочки в устойчивое состояние равновесия при хлопке неизбежно связан с изменением характера периодичности строения формы поверхности, то есть с дополнительными хлопками, при которых значение параметра ξ уменьшается. Это объясняет известный установленный экспериментально факт: вмятины на поверхности оболочки после хлопка, как правило, сжаты вдоль образующей.

4. Все перечисленные результаты относятся к случаю неограниченно упругих оболочек. Для реальных оболочек, обладающих ограниченной упругостью, эти результаты применимы только для достаточно тонких оболочек. В частности, приведенной выше формулой для p_k^* можно пользоваться в том случае, если напряжения величиной

$$\sigma = 3E \frac{\delta}{R}$$

не приводят к значительным пластическим деформациям в материале оболочки.

5. Исследование закритического состояния равновесия сравнительно толстых оболочек невозможно без учета пластических деформаций.

§ 2. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Наша основная задача состоит в определении упругого состояния сжатой цилиндрической оболочки при закритических деформациях, после потери устойчивости. Для того чтобы подойти к ее решению, необходимо прежде всего хотя бы в общих чертах составить представление о форме поверхности оболочки при такой деформации. Мы будем исходить из естественного предположения о том, что эта форма является развитием волнообразования, возникающего в момент потери устойчивости, которое и рассмотрим в настоящем параграфе.

1. Условие равновесия цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Пусть круговая цилиндрическая оболочка радиуса R , длины L и толщины δ находится под действием сжимающей, равномерно распределенной нагрузки, равной p на единицу площади поперечного сечения (черт. 1). Если нагрузка p мала, то оболочка в деформированном состоянии имеет также цилиндрическую форму. При сравнительно больших значениях p , как показывает эксперимент, возможны другие формы упругого равновесия, при которых оболочка уже не является цилиндрической, и, таким образом, упругое состояние оболочки величиной p действующей нагрузки определяется неоднозначно. Выясним, для каких значений p это может иметь место.

Введем на поверхности оболочки систему криволинейных координат x, y , приняв за линии x прямолинейные образующие, а за линии y — сечения, перпендику-

лярные оси. В качестве координат x и y примем расстояния вдоль координатных линий. Начало отсчета поместим на краю оболочки. Обозначим $\omega(x, y)$ прогиб оболочки в точке (x, y) — смещение точки по нормали поверхности в результате упругой деформации.

В линейной теории оболочек устанавливается, что прогиб $\omega(x, y)$ равномерно сжатой цилиндрической оболочки удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

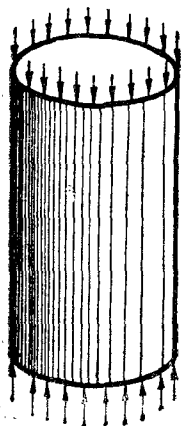


Рис. 1.

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta \omega + \frac{E}{R} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0, (*)$$

где

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа*.

Мы будем предполагать шарнирное опирание оболочки по краю. При этом цилиндрической форме упругого состояния оболочки соответствует решение $\omega \equiv 0$. И вопрос о том, существуют ли другие формы упругого равновесия, решается в зависимости от того, является ли решение $\omega \equiv 0$ единственным или нет. Выясним, для каких значений p уравнение (*) имеет нетривиальное (не равное нулю тождественно) решение ω .

Предполагая достаточную регулярность функции $\omega(x, y)$, мы можем представить ее в виде бесконечного тригонометрического ряда

$$\omega = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(a_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R} + b_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{ny}{R} + c_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R} + d_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{ny}{R} \right),$$

* См., например, А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, М., 1956.

равномерно сходящегося вместе с производными, которые входят в уравнение (*).

Подставляя это представление для $\omega(x, y)$ в уравнение (*), получим

$$\sum_{n, n=0}^{\infty} \varphi_{mn}(\rho) \left(a_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{n y}{R} + b_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{n y}{R} + \right. \\ \left. + c_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{n y}{R} + d_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{n y}{R} \right) = 0,$$

где

$$\varphi_{mn}(\rho) = \frac{D}{\delta} \left(\frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) + \\ + \frac{E}{R^2} \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^4 - \rho \left(\frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^2. \quad (**)$$

Так как ряд, стоящий в левой части равенства, сходится равномерно и его сумма равна нулю тождественно, то все коэффициенты ряда должны быть равны нулю. Поэтому, если функция $\omega(x, y)$ не равна нулю тождественно и, следовательно, среди коэффициентов $a_{mn} \dots d_{mn}$ есть отличные от нуля, то хотя бы для одной пары целых m и n должно быть $\varphi_{mn}(\rho) = 0$. Обратно, если найдутся такие целые m и n , что $\varphi_{mn}(\rho) = 0$, то уравнение (*) при краевом условии

$$\omega \Big|_{\substack{x=0 \\ k=L}} = 0$$

имеет нетривиальное решение. Таковым является

$$\omega = \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Итак, для того чтобы уравнение (*) имело нетривиальное решение при краевом условии $\omega = 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали целые m и n , удовлетворяющие условию

$$\varphi_{mn}(\rho) = 0,$$

где φ определяется равенством (**).

2. Верхняя критическая нагрузка

Ниже будет показано, что совокупность тех значений p , для которых уравнение

$$\varphi_{mn} = 0$$

имеет целочисленное решение m, n , ограничено снизу некоторой величиной p_k , которая называется верхней критической нагрузкой. Если нагрузка $p < p_k$, то форма упругого равновесия оболочки может быть только цилиндрической. Следствием однозначности этой формы является устойчивость упругого равновесия при такой нагрузке.

Когда же нагрузка p достигает критического значения p_k , оболочка теряет устойчивость. Значительные деформации, которыми сопровождается потеря устойчивости оболочки, сообщают ей такую форму, при которой ее способность сопротивляться воздействию сжимающей нагрузки p снижается до некоторой величины p_k^* . Нагрузку p_k^* называют нижней критической нагрузкой.

Для того чтобы определить нижнюю критическую нагрузку, мы должны рассмотреть закритическое упругое состояние оболочки, после потери устойчивости. Эта задача представляется довольно трудной. И чтобы подойти к ее решению, нам надо прежде всего создать правильное представление о форме поверхности оболочки в закритическом состоянии. Исходя из предположения о том, что форма поверхности при закритической деформации в значительной степени предопределяется характером волнообразования в начальной стадии выпучивания, мы выясним сначала, когда и как происходит потеря устойчивости.

Начнем с определения верхней критической нагрузки p_k . Уравнение $\varphi_{mn}(p) = 0$ определяет p как функцию от m и n . Задача состоит в том, чтобы найти минимум этой функции на множестве целых значений m, n .

Если мы вместо m и n введем параметры

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R},$$

то зависимость p от ξ и η будет выглядеть так:

$$p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} \eta + \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta}.$$

Положим для краткости

$$\frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} \eta = \zeta^2.$$

Тогда

$$\bar{\rho} = \frac{\zeta^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{1}{\zeta^2},$$

или

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} - \frac{1}{\zeta} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

Отсюда видно, что

$$\bar{\rho} \geq \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

Наименьшее значение $\bar{\rho}$, равное $1/\sqrt{3(1-\mu^2)}$, получается при

$$\frac{\zeta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} - \frac{1}{\zeta} = 0,$$

то есть при

$$\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta} = \frac{1}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}.$$

Заметим, что наименьшего значения $\bar{\rho}$ может не достигаться, так как может не существовать целых значений m и n , удовлетворяющих указанному условию. И во всяком случае верхняя критическая нагрузка не может быть меньше

$$\rho_k = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\delta}{R} \approx 0,6E \frac{\delta}{R}.$$

Обратимся теперь к вопросу о характере волнообразования в момент потери устойчивости оболочки, то есть выясним вид функции $\omega(x, y)$.

Так как $\omega(x, y)$ не равна нулю тождественно, то уравнение

$$\varphi_{mn}(\rho) = 0$$

должно иметь по крайней мере одно целочисленное решение m, n . Вместе с тем мало вероятно, чтобы оно имело более одного решения. Поэтому разложение $\omega(x, y)$ в тригонометрический ряд должно иметь вид:

$$\omega = a_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R} + b_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{ny}{R} + \\ + c_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R} + d_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{ny}{R}.$$

Принимая во внимание краевое условие $\omega = 0$ при $x = 0, x = L$, заключаем, что $c_{mn} = 0$ и $d_{mn} = 0$. Таким образом,

$$\omega = a_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R} + b_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \cos \frac{ny}{R}.$$

Смещением начала отсчета (y) вдоль края, то есть преобразованием $y \sim y + c$, приводим ω к виду:

$$\omega = a_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему представлению о характере выпучивания сжатой цилиндрической оболочки. *В момент потери устойчивости поверхность оболочки разбивается на 4 mn прямоугольных областей со сторонами*

$$a = \frac{\pi R}{n}, \quad b = \frac{L}{2m}$$

по окружности и высоте цилиндра соответственно. В каждой из этих областей происходит выпучивание внутрь цилиндра или наружу. Области, в которых происходит выпучивание в одну сторону, располагаются в шахматном порядке.

Чему равны стороны a и b прямоугольников, остается пока неясным. Известно только, что параметры m и n , которые их определяют, должны сообщать минимум \bar{p} , а следовательно, связаны соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} - \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta} \approx 0.$$

3. Некоторые экспериментальные данные

Процесс потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии подвергался экспериментальному исследованию многими авторами. Результаты этих исследований изложены, например, в упомянутой выше книге А. С. Вольмира. Мы укажем здесь некоторые из экспериментально установленных фактов, которые используются нами в дальнейшем.

Прежде всего следует отметить, что формы упругого равновесия, возникающие в результате выпучивания, оказываются неустойчивыми. Неустойчивость проявляется в том, что нагрузка, воспринимаемая оболочкой при выпучивании, уменьшается. При постоянной осевой нагрузке переход в закритическое упругое состояние происходит мгновенно, оболочка хлопает.

В момент хлопка на поверхности образцов, подвергавшихся осевому сжатию, появлялись глубокие, правильно расположенные по окружности и высоте цилиндра вмятины ромбовидной формы (черт. 2). Диагонали ромба (вмятины) примерно равны. В отдельных случаях вмятины слегка вытягивались вдоль окружности цилиндра. При дальнейшем нагружении размеры вмятин сокращались в направлении сжатия.

Безразмерное критическое значение нагрузки \bar{p} , для которого в п. 2 мы получили значение 0,6, даже в пределах одной серии опытов ($R/\delta = 90 \div 200$) значительно колебалось (от 0,23 до 0,42). Но во всех опытах оно было меньше теоретического значения 0,6 по крайней мере в полтора раза. В результате хлопка наблюдалось значительное снижение воспринимаемой оболочкой нагрузки (в три — четыре раза меньше критического значения). Этим особенно отличались сравнительно тонкие оболочки.

На образцах, подвергавшихся испытаниям, в результате хлопка появлялись заметные пластические деформации вдоль гребней, разделяющих области выпучивания.

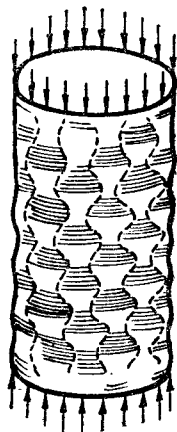


Рис. 2.

Приведенные экспериментальные данные позволяют заключить, что верхняя критическая нагрузка не может служить основанием для практического расчета сжатых цилиндрических оболочек. И это не только потому, что полученное для нее экспериментальное значение намного меньше теоретического (0,6), но главным образом потому, что эта величина существенно зависит, по-видимому, от многих факторов, резко ее снижающих. Таковым является, например, начальная погибь.

В расчете сжатых оболочек необходимо ориентироваться на нижнюю критическую нагрузку, воспринимаемую оболочкой после хлопка, так как хлопок, даже если он не приводит к разрушению оболочки, имеет своим следствием появление пластических деформаций, которые вряд ли допустимы в условиях нормальной работы оболочки. Следует заметить также, что нижняя критическая нагрузка, определяемая при условии больших деформаций, менее чувствительна к различным факторам, обычно снижающим величину верхней критической нагрузки, например, к начальной погиби.

Нижняя критическая нагрузка при осевом сжатии цилиндрической оболочки была предметом теоретических исследований многих авторов. Результаты некоторых исследований приведены в упомянутой книге А. С. Вольмира. Наименьшее значение, полученное для величины этой нагрузки \bar{p} , оказалось равным 0,18 независимо от R/δ . Оно и рекомендовано в качестве расчетного для тщательно изготовленных оболочек, работающих в условиях осевого сжатия.

Экспериментальные данные лишь отчасти подтверждают это расчетное значение, в особенности для тонких оболочек, для которых экспериментальное значение оказывается намного меньше. Обычно это несоответствие данных расчета и эксперимента объясняют несовершенством формы испытуемых образцов (начальной погибью). То, что образцы после хлопка работают в условиях упруго-пластических деформаций, совершенно игнорируется.

Наше исследование вопроса о нижней критической нагрузке состоит из двух частей. В первой части (§ 4,5) будет найдено числовое значение для \bar{p} в предположении, что области выпучивания после хлопка являются квадратными (это предположение подтверждается многочис-

ленными экспериментами). Во второй части (§ 5) будет проведено общее исследование закритического упругого состояния. Цель этого исследования — дать качественную картину перехода к закритическим деформациям сжатой оболочки и, таким образом, объяснить результаты эксперимента.

§ 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Мы полагаем, что переход к закритическому упругому состоянию сжатой цилиндрической оболочки связан в основном с геометрическим изгибанием. Внутренние деформации срединной поверхности (растяжение — сжатие) играют при этом подчиненную роль. В связи с этим в настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые изометрические преобразования цилиндрической поверхности, с помощью которых мы будем воспроизводить форму оболочки при закритических деформациях.

1. Описание изометрического преобразования цилиндрической поверхности

Возьмем правильную призму с четным числом сторон ($2n$) и проведем на одной из ее боковых граней α_1 произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось призмы (черт. 3а). Отразим кривую γ_1 зеркально в плоскости β , проходящей через боковое ребро грани α_1 и ось призмы. При этом получится кривая γ_2 , лежащая в боковой грани α_2 , смежной с α_1 . Затем аналогично строим кривую γ_3 в грани α_3 , смежной с α_2 и т. д. Так в каждой грани α_i построим кривую γ_i .

Проведем теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично построим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Поверхности Z_{12} , Z_{23} , ... составляют трубчатую поверхность Z , всюду гладкую, кроме ребер γ_1 , γ_2 , ... (черт. 3б). Утверждается, что *построенная таким образом поверхность Z изометрична цилиндру.*

Для того чтобы это доказать, покажем сначала, что поверхность Z локально изометрична плоскости, то есть что каждая точка этой поверхности имеет окрестность изометричную куску плоскости. Это очевидно для точек, не лежащих на ребрах γ_i поверхности. Рассмотрим точки на одной из кривых γ_i , например, γ_2 .

Отразим поверхность Z_{23} зеркально в плоскости грани α_2 . Полученная при этом поверхность Z_{23}^* является продолжением поверхности Z_{12} за край γ_2 в виде цилиндрической поверхности. Поверхность, составленная из Z_{12} и Z_{23}^* , как цилиндрическая, вдоль кривой γ_2 локально изометрична плоскости. Отсюда следует, что вдоль этой кривой поверхность, составленная из Z_{12} и Z_{23} , а следовательно, и Z , тоже локально изометрична плоскости.

Приведенная конструкция позволяет без труда заключить также, что замкнутая ломаная $\bar{\gamma}$, составленная из прямолинейных образующих поверхностей Z_{12} , Z_{23} , ..., то есть пересечение поверхности Z с плоскостью, перпендикулярной оси призмы, является замкнутой геодезической.

Двух приведенных соображений (о локальной изометрии плоскости и замкнутых геодезических) достаточно для того, чтобы заключить об изометрии поверхности Z круговому цилиндру.

Определим радиус цилиндра, изометричного поверхности Z . Для этого рассмотрим пересечение поверхности Z с плоскостью, перпендикулярной оси призмы. Как было указано, получаемая при этом замкнутая ломаная $\bar{\gamma}$ является геодезической, и, следовательно, ее длина U связана с радиусом R цилиндра соотношением

$$U = 2\pi R.$$

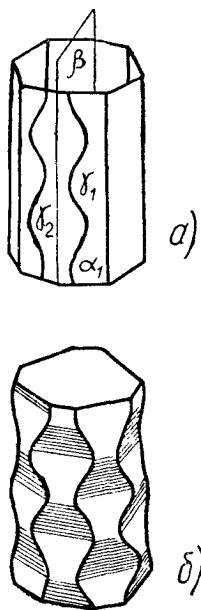


Рис. 3.

Ломаная $\bar{\gamma}$ вписана в правильный $2n$ -угольник $\bar{\gamma}_0$, по которому плоскость, в которой лежит γ , пересекает боковую поверхность призмы (черт. 4). Так как стороны $\bar{\gamma}$ со сторонами многоугольника $\bar{\gamma}_0$ образуют равные углы $\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, то независимо от формы ломаной $\bar{\gamma}$ она имеет всегда один и тот же периметр U , равный периметру правильного $2n$ -угольника с вершинами в серединах сторон многоугольника $\bar{\gamma}_0$. Теперь не составляет труда найти периметр ломаной $\bar{\gamma}$, а следовательно, и радиус R цилиндра, изометричного поверхности Z .

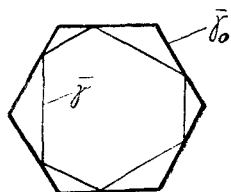


Рис. 4.

Приведенное соображение позволяет сделать важный вывод, а именно: радиус цилиндра, изометричного Z , не зависит от того, какова была взята кривая γ на грани призмы α_1 при построении поверхности Z .

Проведем через ось призмы и одно из ее боковых ребер плоскость. Она пересечет поверхность Z по некоторой кривой $\tilde{\gamma}$. На поверхности кругового цилиндра, которому изометрична поверхность Z , кривой $\tilde{\gamma}$ по изометрии соответствует прямая образующая. Следовательно, длина кривой $\tilde{\gamma}$ равна высоте цилиндра, изометричного Z , и не зависит от того, через какое из боковых ребер проведена секущая плоскость, определяющая кривую $\tilde{\gamma}$.

Предположим теперь, что кривая γ_1 , с помощью которой описанной выше конструкцией получается поверхность Z , произвольным образом деформируется, но так, что длина кривой $\tilde{\gamma}$ сохраняется. При этом поверхность Z также деформируется. И так как радиус и высота цилиндра изометричного Z не изменяются, то эта деформация есть геометрическое изгибание. С помощью такого изгибания мы будем приближать упругую деформацию цилиндрической оболочки в закритической стадии.

2. Определение некоторых величин для поверхности Z

Обозначим α одну из граней призмы, в которую вписана поверхность Z . Ребро этой поверхности, лежащее в грани α , обозначим γ . Проведем через ось призмы и боковое ребро грани α плоскость β и пересечение ее с поверхностью Z обозначим $\tilde{\gamma}$. Кривая $\tilde{\gamma}$ представляет собой нормальное сечение поверхности Z , перпендикулярное образующим.

Введем в плоскости грани α прямоугольную декартову систему координат xy , приняв за ось x прямую, параллельную боковым ребрам грани, проходящую посередине между ними, а за ось y — прямую, перпендикулярную x . Пусть в этих координатах ребро γ поверхности Z задается уравнением

$$y = y(x).$$

Введем в плоскости β также прямоугольную декартову систему координат, приняв за оси x и y проекции осей координат, введенные в плоскости α . В этих координатах нормальное сечение $\tilde{\gamma}$ поверхности Z задается уравнением

$$y = \tilde{y}(x) = \sin \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Мы будем предполагать n достаточно большим, и поэтому можно считать, что

$$\tilde{y}(x) \approx \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Определим кривизну k ребра γ поверхности Z . По известной формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Определим нормальную кривизну поверхности Z в сечении, перпендикулярном образующим. Имеем:

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{y}''}{(1 + \tilde{y}'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Предполагая n большим, мы опустим член \tilde{y}'^2 в знаменателе этой формулы. Тогда получим

$$\tilde{k} = \tilde{y}'' ,$$

или, вводя вместо $\tilde{y} = y$,

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y'' .$$

Определим угол ϑ , который образует плоскость ребра γ поверхности Z с касательными плоскостями. С этой целью систему координат xy в плоскости β дополним до пространственной системы координат xyz . В такой системе координат угловые коэффициенты плоскости ребра γ , то есть плоскости α , будут $0, 1, -\frac{\pi}{2n}$, угловые коэффициенты касательной плоскости поверхности $-\frac{\pi}{2n} y', 1, 0$. Угол между плоскостями равен углу между векторами $(0, 1, -\frac{\pi}{2n})$, $(-\frac{\pi}{2n} y', 1, 0)$. Отсюда для угла ϑ при большом n получается следующее значение:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2} .$$

Найдем осевое сжатие при изометрическом преобразовании кругового цилиндра в поверхность Z . Возьмем на цилиндре область G , расположенную между двумя сечениями, перпендикулярными оси, отстоящими на расстоянии b . Изометричная ей область Z_G на поверхности Z ограничена двумя плоскостями, перпендикулярными оси призмы, отстоящими на некотором расстоянии b' . Осевое сжатие, о котором идет речь, есть разность $b - b' = \Delta b$.

Высота b пояса G на цилиндре, как показано в п. 1, равна длине кривой $\tilde{\gamma}$ на поверхности Z_G . Следовательно,

$$b = \int_{(Z_G)} \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} dx ,$$

где интегрирование выполняется по высоте пояса Z_G поверхности Z :

$$\int_{(Z_G)} dx = b'.$$

Предполагая, как и раньше, y'^2 малым, можем записать:

$$b \simeq \int_{(Z_G)} \left(1 + \frac{\tilde{y}'^2}{2} \right) dx = b' + \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(Z_G)} y'^2 dx.$$

Отсюда

$$\Delta b = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(Z_G)} y'^2 dx.$$

Предположим теперь, что функция $y(x)$, задающая кривую γ , периодическая и четная. Пусть m — число полных волн кривой γ . Проведем через вершины кривой γ плоскости, перпендикулярные оси призмы, и назовем их горизонтальными сечениями. Кроме того, проведем полуплоскости через ось призмы и ее боковые ребра — радиальные сечения. Эти плоскости разбивают поверхность Z на $4mn$ равных областей Δ , каждая из которых изометрична прямоугольнику (черт. 5). Определим стороны этого прямоугольника в зависимости от параметров цилиндра, изометричного Z , то есть радиуса основания и высоты, чисел m и n .

Если высота цилиндра L , то, очевидно, высота прямоугольника Δ

$$b = \frac{L}{2m}.$$

Если радиус цилиндра R , то ширина прямоугольника Δ

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

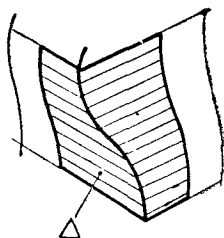


Рис. 5.

По изометрии разбиению поверхности Z на области Δ соответствует разбиение цилиндра, изометричного Z , на $4mn$ прямоугольных областей плоскостями, перпендикулярными оси, отстоящими друг от друга на расстоянии b , и радиальными полуплоскостями, делящими полный угол при оси цилиндра на $2n$ равных частей.



§ 4. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящем параграфе мы подвергнем исследованию закритическое упругое состояние цилиндрической оболочки, находящейся в условиях осевого сжатия при весьма общих предположениях о характере деформации. Это позволит нам в § 5 определить числовое значение нижней критической нагрузки, а также исследовать явление перехода к закритическому упругому состоянию и объяснить результаты эксперимента (§ 6).

1. О форме сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации

Поскольку упругие деформации материала оболочки являются малыми по своей природе, то деформация срединной поверхности при переходе в закритическое упругое состояние, связанное со значительным изменением формы, представляет собой в основном геометрическое изгибание. Отсюда мы заключаем, что форма срединной поверхности при закритической деформации должна быть близка к одной из форм ее изометрического преобразования.

Начало процесса перехода к закритическим деформациям, то есть деформация в момент потери устойчивости цилиндрической формы, которую мы рассмотрели в § 2, дает основание предположить, что изометрическое преобразование цилиндрической поверхности должно обладать известной правильностью как по окружности, так и по высоте. Именно, поверхность должна иметь n плоскостей симметрии и ее строение должно m раз по-

вторяться по высоте. Выясним, как может быть устроена поверхность, изометричная цилиндру, обладающая указанной правильностью строения.

Обозначим рассматриваемую поверхность Z (черт. 6). Проведем одну из ее радиальных плоскостей симметрии β . Эта плоскость пересекает поверхность по некоторой кривой $\tilde{\gamma}$. Пусть P — произвольная точка на этой кривой. Так как поверхность Z развертываемая, то через каждую ее точку, в частности через точку P , проходит прямолинейная образующая $g(P)$. Если предположить для простоты, что поверхность не содержит плоских кусков, то прямолинейная образующая $g(P)$, проходящая через точку P , будет единственной.

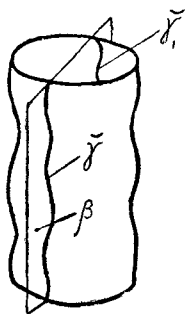


Рис. 6.

В силу симметрии поверхности Z относительно плоскости β прямолинейная образующая $g(P)$, будучи единственной, лежит либо в плоскости β , либо перпендикулярна этой плоскости. Первая возможность исключается, так как в противном случае переход цилиндрической поверхности в поверхность Z не сопровождается осевым сжатием. Таким образом, прямолинейные образующие поверхности в точках линии $\tilde{\gamma}$ должны быть перпендикулярны плоскости β и, следовательно, параллельны друг другу. А это значит, что поверхность Z вблизи линии $\tilde{\gamma}$ должна быть цилиндрической поверхностью с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии β . Такое же строение имеет поверхность Z с противоположной стороны, вблизи линии $\tilde{\gamma}_1$.

Так как поверхность Z имеет n плоскостей симметрии, то она должна состоять из $2n$ цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными этим плоскостям. Будучи так устроена, поверхность Z должна иметь особые линии — ребра. Пусть γ — одно из таких ребер и Z_1, Z_2 — цилиндрические поверхности, которые по этому ребру пересекаются (черт. 7). Так как поверхность Z локально изометрична плоскости, то поверх-

ности Z_1 и Z_2 не могут быть совершенно произвольными. Установим связь между ними.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — пересечение поверхности Z_1 с плоскостью симметрии Z , перпендикулярной ее образующим. Кривая $\tilde{\gamma}$ является геодезической линией. Будем характеризовать положение произвольной точки P кривой γ расстоянием $u(s)$ этой точки от $\tilde{\gamma}$ по образующей (s — дуга вдоль $\tilde{\gamma}$, черт. 7). Так как поверхность Z локально изометрична плоскости, то сумма геодезических кривизн линии γ на поверхностях Z_1 и Z_2 должна быть равна нулю. При заданной поверхности Z_1 и направлении образующих поверхности Z_2 это условие дает некоторое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(s)$:

$$u'' = \varphi(u', s). \quad (*)$$

Из единственности решения этого уравнения следует, что кривая γ определяется однозначно (на поверхности Z_1), если задана какая-нибудь ее точка и направление в ней.

Ввиду периодичности строения поверхности по высоте, найдется на линии γ такая точка P_0 , в которой касательная к ней параллельна оси поверхности (осью мы называем прямую, по которой пересекаются плоскости симметрии). Проведем через точку P_0 плоскость α , параллельную оси поверхности так, чтобы образующие поверхностей Z_1 и Z_2 , исходящие из точки P_0 , составляли равные углы с плоскостью α и располагались по одну ее сторону. Пусть γ' — кривая, по которой плоскость α пересекает поверхность Z_1 и ее продолжение за кривую γ . Кривая γ' удовлетворяет уравнению (*). Соответствующая поверхность Z'_2 строится зеркальным отражением в плоскости α той части поверхности Z_1 и ее продолжения, которая находится за кривой γ' . Так как кривые γ и γ' имеют общую точку (P_0) и направление в ней, то они совпадают. Отсюда следует, что поверхность Z получается конструкцией, описанной в § 3. Плоскость α является одной из граней призмы.

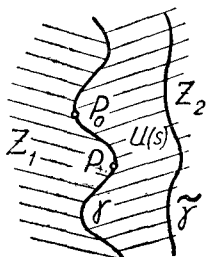


Рис. 7.

Итак, в качестве исходного приближения формы сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации следует брать изометричную цилиндру поверхность Z , рассмотренную в § 3.

2. Энергия упругой деформации оболочки

Мы полагаем, что работа, производимая внешней нагрузкой при осевом сжатии цилиндрической оболочки в закритической деформации, переходит главным образом в энергию изгиба оболочки. Найдем выражение для этой энергии в зависимости от величин, характеризующих деформацию.

Как показано выше (п. 1), форму срединной поверхности сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации следует приближать ее изометрическим преобразованием Z . Поверхность Z , подробно описанную в § 3, мы разбили на $4mn$ равных областей Δ , правильно расположенных на Z в $2m$ поясах по $2n$ областей в каждом поясе. Область Δ изометрична прямоугольнику с основанием a , высотой b и составлена из двух цилиндрических поверхностей, примыкающих по ребру γ .

Для того чтобы найти энергию изгиба всей оболочки, достаточно найти энергию изгиба в одной области Δ и результат умножить на $4mn$. Энергию изгиба в области Δ мы условно разбиваем на две части, которые назовем U_{Δ} и U_{γ} , U_{γ} — это энергия, связанная со значительным местным изгибом вдоль ребра γ , а U_{Δ} — энергия изгиба по остальной части области Δ .

Энергию U_{Δ} мы определим как энергию деформации цилиндрической поверхности в поверхность Δ . Обозначим t' направление радиального нормального сечения исходной цилиндрической поверхности, а t'' — направление нормального сечения, перпендикулярного оси. Нормальная кривизна в направлении t' равна нулю, а нормальная кривизна в направлении t'' равна $1/R$, где R — радиус цилиндра. В соответствующих по изометрии направлениях на поверхности Δ нормальные кривизны равны $\pi y''/2n$ (§ 3, п. 2) и 0 соответственно. Напомним, что $y(x)$ — это функция, задающая ребро γ поверхности Δ на разрезке этой поверхности (черт. 8)*. Таким об-

* Строго говоря, функция $y(x)$ имеет другое значение. Но если ее понимать таким образом, то разница будет порядка тех величин, которыми мы пренебрегали в рассмотрении § 3.

разом, при рассматриваемой деформации происходит изменение нормальных кривизн на $\pi y''/2n$ и $1/R$, а следовательно, энергия изгиба, связанная с такой деформацией,

$$U_{\Delta} = \frac{D}{2} \iint_{\Delta} \left\{ \left(\frac{\pi}{2n} y'' + \frac{1}{R} \right)^2 - (1-\mu) \frac{\pi y''}{nR} \right\} ds,$$

где

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, а интегрирование выполняется по площади области Δ . Подынтегральное выражение в U_{Δ} представляет собой квадратный трехчлен относительно y'' с постоянными коэффициентами. При интегрировании линейной части этого трехчлена получается нуль, так как на сторонах a области Δ $y' = 0$. Поэтому выражение U_{Δ} упрощается и принимает вид:

$$U_{\Delta} = \frac{\pi^2 Da}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{Dab}{R^2},$$

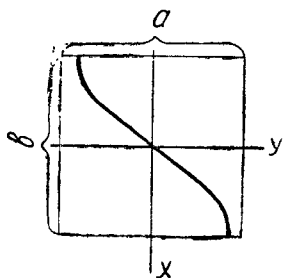


Рис. 8.

где интегрирование выполняется по высоте прямоугольника Δ (черт. 8).

Обратимся теперь к энергии местного изгиба U_{γ} . В предыдущей работе автора* для энергии местного изгиба на единицу длины ребра получено следующее выражение:

$$\bar{U}_{\gamma} = cE\delta^{\frac{5}{2}} \vartheta^{\frac{5}{2}} k^{\frac{1}{2}},$$

где k — кривизна ребра, ϑ — угол, который образует плоскость ребра с касательными плоскостями, δ — тол-

* А. В. Погорелов. Теория выпуклых упругих оболочек в закрытой стадии.

щина оболочки, E — модуль упругости, а c — некоторая постоянная ($\approx 0,12$). В рассматриваемом случае

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Полная энергия изгиба U_γ находится интегрированием выражения \bar{U}_γ по дуге кривой γ . Замечая, что элемент дуги этой кривой

$$ds = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

получим

$$U_\gamma = cE\delta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{5}{2}} \int_{(b)} |y''|^{\frac{1}{2}} (1+y'^2) dx,$$

где интегрирование распространяется на кривую γ в области Δ .

Для того чтобы определить полную энергию изгиба оболочки, остается сложить полученные выражения для U_Δ и U_γ .

Итак, энергия изгиба цилиндрической оболочки в закритической деформации, обусловленной осевым сжатием, в области Δ определяется по формуле

$$U = \frac{\pi^2 Da}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{Dab}{R^2} + \\ + cE\delta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{5}{2}} \int_{(b)} |y''|^{\frac{1}{2}} (1+y'^2) dx.$$

В связи с рассмотрением состояния равновесия оболочки под действием осевой нагрузки, которое будет дано в следующем пункте, удобно оперировать с энергией не всей оболочки, а ее части в поясе, составленном из $2n$ областей Δ . Энергия этого пояса $U = 2n (U_\gamma + U_\Delta)$, или, принимая во внимание полученные выражения для U_Δ и U_γ ,

$$U = \frac{\pi^2 Da}{4n} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{2nDab}{R^2} + \\ + 2ncE\delta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{5}{2}} \int_{(b)} |y''|^{\frac{1}{2}} (1+y'^2) dx.$$

В заключение заметим, что если предполагать цилиндрическую оболочку согнутой упругим образом из плоского листа, как это часто бывает, то выражение энергии изгиба оболочки будет отличаться только средним членом $(2nDab/R^2)$, который в этом случае будет отсутствовать.

3. Определение состояния равновесия сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации

Функция $y(x)$, задающая форму ребра поверхности Z , а следовательно, и форму самой поверхности Z , определяется из условия минимума энергии упругой деформации

$$U = \frac{\pi^2 Da}{4n} \int_{(b)} y'^2 dx + \frac{2nDab}{R^2} + \\ + 2ncE\delta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{5}{2}} \int_{(b)} |y''|^{\frac{1}{2}} (1 + y'^2) dx$$

при заданной степени сжатия оболочки $\Delta b = h$, то есть при условии

$$\frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx = h. \quad (*)$$

Если найти функцию $y(x)$ из такого условия, то энергия изгиба U станет определенной функцией от h $U(h)$.

Состояние равновесия оболочки определяется условием

$$\frac{dU}{dh} = \frac{dA}{dh},$$

где A — производимая внешней нагрузкой работа при осевом сжатии. Если осевая нагрузка на оболочку равномерно распределена по краю и составляет p на единицу площади поперечного сечения, то

$$A = 2\pi R\delta p h,$$

и мы получаем уравнение равновесия оболочки в виде:

$$2\pi R\delta p = \frac{dU}{dh}.$$

Остается определить только зависимость U от h , то есть минимум функционала U при условии (*).

В связи с исследованием минимума функционала U представляется целесообразным сделать замену пере-

менных путем перехода к безразмерным величинам. Вместо переменных x и y мы введем новые переменные \bar{x} и \bar{y} , согласно формулам:

$$x = \lambda \bar{x}, \quad y = \mu \bar{y},$$

где λ и μ — постоянные множители. Выбором множителей λ и μ распорядимся так, чтобы интервал интегрирования в условии (*) вместо b стал равен 2 и само это условие приняло вид:

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

(Черта над обозначениями x и y в подынтегральном выражении для простоты записи опущена). Нетрудно видеть, что для этого надо взять λ и μ , определяемые соотношениями:

$$\frac{b}{2} = \lambda, \quad \frac{\pi^2 \mu^2}{8n^2 \lambda} = h,$$

откуда

$$\lambda = \frac{b}{2}, \quad \mu = \frac{2n}{\pi} \sqrt{b\bar{h}}.$$

В новых переменных выражение энергии изгиба принимает следующий вид:

$$U = \frac{2E\delta^3 a h n}{3(1-\mu^2)b^2} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \frac{2nDab}{R^2} + \\ + \frac{\pi^2 c}{2n} E\delta^{\frac{5}{2}} (bh)^{\frac{1}{4}} \int_{-1}^1 |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{16n^2 h}{\pi^2 b} y'^2\right) dx.$$

Введем теперь вместо h безразмерное сжатие \bar{h} , определяемое соотношением

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n}\right)^2 \frac{\bar{h}}{b}^*,$$

и положим

$$\frac{b}{a} = \xi.$$

Заметим еще, что

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

* Значение такой именно нормировки осевого сжатия оболочки выяснится в следующем параграфе при определении нижней критической нагрузки.

Тогда энергии упругой деформации U можно придать следующую форму:

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \bar{h}}{12 (1 - \mu^2) \xi^3 n} \int_{-1}^1 y'^2 dx + \frac{2n D a b}{R^2} + \\ + \frac{\pi^3 c E}{4 n^2} \delta^{\frac{5}{2}} R^{\frac{1}{2}} (2\bar{h})^{\frac{1}{4}} \int_{-1}^1 |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{\xi^2} \bar{h} y'^2 \right) dx.$$

Работа A , производимая внешней нагрузкой, преобразуется к виду:

$$A = \frac{\pi^4 R^2 \delta \rho \bar{h}}{4 \xi n^3}.$$

Теперь уравнение равновесия можно записать так:

$$P = E \frac{\delta}{R} \frac{dJ(\bar{h})}{d\bar{h}},$$

где $J(\bar{h})$ минимум функционала

$$J = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\bar{h} \left(n \sqrt{\frac{\delta}{R}} \right)^2 y'^2}{3\pi^2 (1 - \mu^2) \xi^2} + (2\bar{h})^{\frac{1}{4}} \frac{c \xi}{\pi} \left(n \sqrt{\frac{\delta}{R}} \right) |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\bar{h}}{\xi^2} y'^2 \right) \right\} dx$$

при связи

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$

и граничных условиях для функции $y(x)$: $y'(-1) = y'(1) = 0$.

Функционал J зависит от двух параметров, характеризующих деформацию оболочки в целом: ξ и $n \sqrt{\delta/R}$. Значение этих параметров мы рассмотрим в следующем параграфе.

К сожалению, мы не можем дать явного выражения для минимума $J(\bar{h})$ функционала J , и это затрудняет исследование перехода сжатой цилиндрической оболочки в закритическое состояние. В связи с этим в § 6 мы примем несколько упрощенную схему закритического упругого состояния, в которой функция будет найдена в явном виде. Это позволит дать качественное описание явления хлопка и объяснить результаты экспериментальных исследований.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ОСНОВНОМ СЛУЧАЕ

Экспериментальным исследованием цилиндрических оболочек, подверженных осевому сжатию, установлено, что после потери устойчивости оболочки ее способность воспринимать внешнюю нагрузку мгновенно снижается до некоторой величины p^* , которую обычно называют нижней критической нагрузкой.

Установлено также, что вмятины на поверхности оболочки, возникающие при переходе ее в закритическое упругое состояние, как правило, имеют форму «квадратов», причем одна из диагоналей направлена по образующей. Исключения из этого правила сравнительно редки, и такой характер выпучивания при хлопке естественно называть основным.

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о нижней критической нагрузке в указанном основном случае.

1. Определение параметров, характеризующих деформацию оболочки в целом

Мы будем исходить из предположения о том, что характер периодичности строения формы оболочки при переходе в закритическое упругое состояние при хлопке сохраняется. Это значит следующее.

В момент потери устойчивости цилиндрической формы прогиб ω является периодической функцией как по окружности цилиндра, так и по высоте. В обозначениях § 2 форма поверхности оболочки при малом выпучивании ω повторяется n раз по окружности и m раз по высоте.

Наше предположение состоит в том, что во все время закритической деформации такая периодичность сохраняется, то есть остаются неизменными параметры m и n , характеризующие периодичность.

Это условие естественно и обычно подразумевается само собой, хотя можно было бы привести соображения за то, что оно может и не выполняться. Развитие закритической деформации может привести к изменению характера периодичности в результате неустойчивости промежуточных форм. Но к этому вопросу мы обратимся в следующем параграфе.

В этом же параграфе мы будем считать как данное то, что формы вмятин после хлопка квадратные, а характер периодичности формы поверхности оболочки такой же, как и в момент потери устойчивости.

При построении поверхности Z (§ 3), которой приближается форма цилиндрической оболочки после хлопка (§ 4), мы исходили из правильной призмы с числом сторон $2n$. Независимо от формы кривой γ на грани призмы поверхность имела периодическое строение относительно оси, повторяющееся n раз. А так как периодичность строения формы оболочки относительно оси сохраняется в процессе хлопка, то мы должны заключить, что n , определяющее периодичность Z , и n , определяющее периодичность ω в момент потери устойчивости (§ 2), имеют одно и то же значение.

Так как области выпучивания оболочки после хлопка имеют форму квадратов, то это значит, что период строения оболочки по окружности и высоте одинаков. Следовательно, одинаковы периоды функции ω .

Периоды функции ω по окружности и высоте цилиндра соответственно равны

$$\frac{2\pi R}{n} \text{ и } \frac{L}{m}.$$

Отсюда получается

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm} = 1.$$

Как показано в § 2, параметры ξ и η , характеризующие форму волнообразования при потере устойчивости цилиндрической оболочки, связаны соотношением

$$\frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \eta = \frac{1}{\sqrt{12(1 - \mu^2)}}, \quad \left(\eta = \frac{n^2 \delta}{R} \right).$$

Отсюда при $\xi = 1$ получается

$$n \sqrt{\frac{\bar{\delta}}{R}} \simeq 0,9.$$

(Коэффициент Пуассона μ принят равным 0,3).

В предыдущем параграфе для величины, воспринимаемой оболочкой нагрузки ρ после хлопка, получена следующая формула:

$$\rho = E \frac{\bar{\delta}}{R} \frac{dJ(\bar{h})}{d\bar{h}},$$

где $J(\bar{h})$ — минимум функционала

$$J = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\left(n \sqrt{\frac{\bar{\delta}}{R}} \right)^2 \bar{h} y'^2}{3\pi^2 (1 - \mu^2) \xi^2} + \frac{c\xi}{\pi} \left(n \sqrt{\frac{\bar{\delta}}{R}} \right) (2\bar{h})^{\frac{1}{4}} |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\bar{h}}{\xi^2} y'^2 \right) \right\} dx$$

при связи

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$

и граничных условиях для функции $y(x)$

$$y'(-1) = y'(1) = 0.$$

Подставляя

$$\xi = 1 \text{ и } n \sqrt{\frac{\bar{\delta}}{R}} = 0,9$$

в выражение функционала J , получим

$$J = 0,03 \int_{-1}^1 (\bar{h} y'^2 + 1,35 \bar{h}^{\frac{1}{4}} |y''|^{\frac{1}{2}} (1 + 2\bar{h} y'^2)) dx.$$

Положим

$$\bar{J} = \int_{-1}^1 (\bar{h} y'^2 + 1,35 \bar{h}^{\frac{1}{4}} |y''|^{\frac{1}{2}} (1 + 2\bar{h} y'^2)) dx.$$

Теперь задача об определении нагрузки ρ^* сводится к определению минимума функционала \bar{J} в зависимости от \bar{h} . Так как найти в явном виде $\bar{J}(\bar{h})$, по-видимому, нельзя, то мы приведем численное решение.

2. Подготовка числового расчета по определению нижней критической нагрузки

График функции $y(x)$, реализующей минимум функционала \bar{J} , мы будем аппроксимировать симметрично расположенной относительно начала координат кривой, состоящей из двух парабол с горизонтальными касательными на концах и гладко примыкающего к ним прямолинейного отрезка (черт. 9а). Произволом, который допускает такое строение кривой, мы распорядимся так, чтобы удовлетворялось условие

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$

и функционал \bar{J} имел бы наименьшее значение. В качестве параметров, характеризующих форму кривой $y(x)$, мы возьмем угловой коэффициент k наклонных участков графика $y'(x)$ и выражение l горизонтального участка над осью x (черт. 9б).

Имеем:

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 2l^2 \left(1 - \frac{l}{k}\right) + \frac{2l^3}{3k} = 1.$$

Отсюда находим параметр k в зависимости от l

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{l}\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{l}\right)^3. \quad (**)$$

Подставляя функцию $y(x)$ в выражение функционала \bar{J} , получим

$$\bar{J} = 2kl\bar{h} + 2,7 \frac{l}{\sqrt{k}} \bar{h}^{\frac{1}{4}} + 1,8 \frac{l^3}{\sqrt{k}} \bar{h}^{\frac{5}{4}}.$$

Минимум значения \bar{J} мы будем искать численно путем построения таблицы его значений, отвечающих раз-

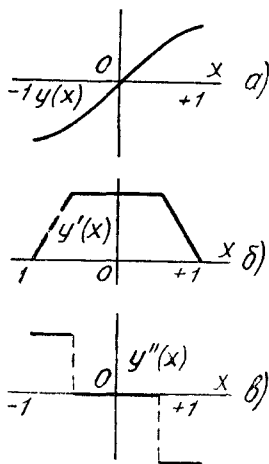


Рис. 9.

личным значениям параметра l . В связи с этим найдем сначала интервал допустимых значений этого параметра.

Так как $k > 0$ по определению, то

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{l} \right)^3 > 0.$$

Отсюда

$$l > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, так как

$$\frac{l}{k} \leq 1$$

и, следовательно,

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{l} \right)^3 \leq 1,$$

то

$$l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, область допустимых значений l определяется неравенствами:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Тот же вопрос рассмотрим для области возможных значений \bar{h} . При решении этого вопроса воспользуемся следующим соображением. Функция $y(x)$ до приведения ее к безразмерной форме (§ 4, п. 3) по смыслу заключена в пределах $-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$. Нормирующий для нее множитель μ определяется по формуле

$$\mu = \frac{2n}{\pi} \sqrt{b\bar{h}},$$

а

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\bar{h}}{b} \quad (\S 4, \text{ п. } 3).$$

Отсюда

$$\mu = a \sqrt{\frac{\bar{h}}{2}},$$

и, следовательно, для нормированной функции $y(x)$, с которой мы имеем дело, должно выполняться неравенство

$$\left| a \sqrt{\frac{\bar{h}}{2}} y(x) \right| < \frac{a}{2},$$

то есть

$$\sqrt{\bar{h}} |y(x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если мы положим

$$\max |y(x)| = M(y),$$

то

$$\bar{h} < \frac{1}{2 \min_{(y)} M}.$$

Для функции $y(x)$ указанного строения (с графиком, составленным из двух парабол и соединяющего их прямолинейного отрезка)

$$M(y) = \int_0^1 y' dx$$

и представляет собой половину площади трапеции на черт. 9б. Отсюда

$$M = l - \frac{1}{2} \frac{l^2}{k}.$$

Принимая во внимание обязательное условие для рассматриваемых функций

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

которое в данном случае имеет вид (**), без труда заключаем, что

$$\min M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, приходим к оценке области значений \bar{h} , для которых следует производить вычисления \bar{J} :

$$\bar{h} < \frac{4}{3}.$$

Наконец, еще одно замечание. Судя по характеру перехода оболочки в закритическое упругое состояние, воспринимаемая ею нагрузка $p(\bar{h})$ убывает с ростом \bar{h} . Этот процесс останавливается, когда гребни рядом расположенных вмятин на поверхности оболочки достаточно близки. Отсюда следует, что нижнюю критическую нагрузку надо определять из указанной близости гребней. Близость гребней в случае ненормированной функции $y(x)$ определяется малостью

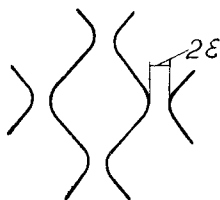


Рис. 10.

$$\varepsilon = \left| \max y(x) - \frac{a}{2} \right| \quad (\text{черт. 10}),$$

а для нормированной функции $y(x)$ соответствующим условием, именно малостью

$$\left| \sqrt{\bar{h}} \max y(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|.$$

Мы подготовили весь необходимый материал для числового расчета и теперь можем приступить к нему.

3. Результаты числового расчета

Числовой расчет по определению нижней критической нагрузки при осевом сжатии цилиндрической оболочки выполнялся в следующей последовательности. Сначала находился минимум функционала \bar{J} при фиксированном \bar{h} на множестве кривых $y(l, x)$. С этой целью функционал \bar{J} вычислялся при всех допустимых значениях параметра l и строились соответствующие графики (черт. 11).

По этим кривым определялось минимальное значение \bar{J} (по l) при каждом фиксированном \bar{h} из области допустимых значений и строился график функции

$$\bar{J}(\bar{h}) = \min_{(l)} \bar{J}(l, \bar{h}) \quad (\text{черт. 12}).$$

Этот график позволяет найти производную $d\bar{J}/d\bar{h}$ и, следовательно, нагрузку $p(\bar{h})$, воспринимаемую оболочкой при относительном осевом сжатии \bar{h} .

В зависимости от \bar{h} строился также график относительного сближения гребней рядом расположенных вмятин, то есть график функции

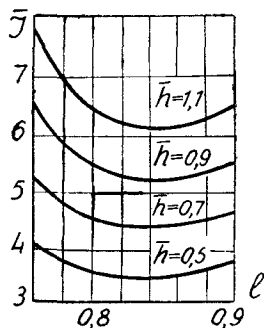


Рис. 11.

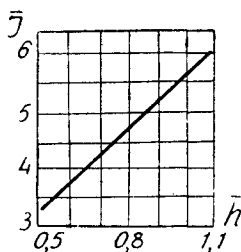


Рис. 12.

$$\epsilon = \frac{1}{l^2} - V \bar{h} \max y_{\bar{h}}(x) \quad (\text{черт. 13}),$$

где $y_{\bar{h}}(x)$ — экстремальная функция, соответствующая осевому сжатию \bar{h} . На черт. 14 показано, как изменя-

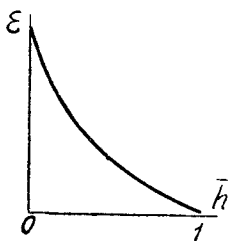


Рис. 13.

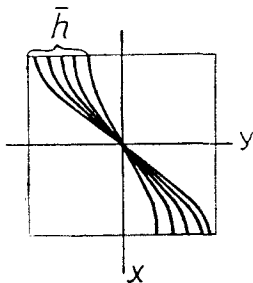


Рис. 14.

ется форма гребня γ на развертке области Δ поверхности Z (§ 3).

Относительно полученных в числовом расчете зависимостей существенно заметить следующее.

Во-первых, $\min \bar{J}(l, \bar{h})$ (по l) достигается практически для всех значений \bar{h} при одном и том же значении $l = 0,83 - 0,84$. Это значит, что параметры l и k , харак-

теризующие экстремальную кривую $y_{\bar{h}}(x)$, одни и те же, то есть $y_{\bar{h}}(x)$ не зависит от \bar{h} . Поэтому форма гребня γ на развертке области Δ поверхности Z при увеличении осевого сжатия (\bar{h}) просто растягивается в направлении y (черт. 14).

Далее, зависимость

$$\bar{J}(\bar{h}) = \min_{(l)} \bar{J}(l, \bar{h})$$

от \bar{h} при \bar{h} , отвечающих значительным сближениям гребней рядом расположенных вмятин, практически линейная, причем коэффициент наклона

$$\frac{d\bar{J}}{d\bar{h}} \approx 4,6.$$

Вообще он несколько убывает с ростом \bar{h} , как и следовало ожидать. На участке $0,3 \leq \bar{h} \leq 0,5$ наклон $d\bar{J}/d\bar{h}$ около 5.

Относительное сближение рядом расположенных вмятин на поверхности оболочки равно

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\bar{h}} \max y_{\bar{h}}(x).$$

Так как функция $y_{\bar{h}}(x)$ не зависит от \bar{h} , ибо определяется одним и тем значением параметра $l \approx 0,84$, то независимо от \bar{h}

$$\max y_{\bar{h}} = l - \frac{1}{2} \frac{l^2}{k} \approx 0,66.$$

Поэтому график относительного сближения вмятин имеет вид параболы (черт. 13). При относительном сжатии оболочки $\bar{h} = 1,1$ сближение гребней вмятин близко к нулю. Отсюда следует, что нижнюю критическую нагрузку надо вычислять по величине $d\bar{J}/d\bar{h}$ для \bar{h} близких к 1,1, то есть по величине

$$\frac{d\bar{J}}{d\bar{h}} = 4,6.$$

Приняв для величины $d\bar{J}/d\bar{h}$ значение 4,6, для нижней критической нагрузки получим

$$E \frac{\delta}{R} 0,03 \cdot 4,6 = 0,138 E \frac{\delta}{R}.$$

Итак, для неограниченно упругой цилиндрической оболочки при осевом сжатии в основном случае перехода к закритическому упругому состоянию воспринимаемая ею нагрузка снижается до величины

$$p^* = 0,138 E \frac{\delta}{R}.$$

Реальная оболочка, как известно, обладает ограниченной упругостью. И поэтому полученный в расчете результат к реальным оболочкам применим лишь в том случае, если напряжения в материале оболочки, возникающие при переходе к закритическому состоянию, не вызывают пластических деформаций.

Наиболее значительными напряжениями в материале оболочки при закритической деформации являются напряжения от местного изгиба на гребнях по границе вмятин. Оценим величину этих напряжений.

Как показано в цитированной работе автора*, максимальные напряжения от местного изгиба определяются по формуле

$$\sigma = c'E \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{2}{3}},$$

где ρ — радиус кривизны границы области выпучивания γ (в нашем случае радиус кривизны гребня), ϑ — угол, образуемый плоскостью кривой γ с касательными плоскостями, δ — толщина оболочки, а c' — постоянная (≈ 1).

Имеем:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \quad (\S 3),$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{\lambda^2} y'' \quad (\S 3, 4),$$

* А. В. Погорелов. Теория выпуклых упругих оболочек в закритической стадии.

где λ и μ — нормирующие множители при переходе к безразмерным переменным x и y (§ 4). Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\lambda^2} &= \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh} \frac{4}{b^2}, \\ h &= \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\bar{h}}{b}, \\ b = a &= \frac{\pi R}{n}, \quad y'' = k,\end{aligned}$$

получим

$$\frac{1}{\rho} = 2 \sqrt{2\bar{h}} \frac{nk}{\pi R}.$$

Подставляя значения $1/\rho$ и δ в формулу для σ и замечая, что $\bar{h} \approx 1$, $k \approx 2$, $n = 0,9 \sqrt{R/\delta}$, найдем

$$\sigma \approx 3E \frac{\delta}{R}.$$

Отсюда следует, что для реальных оболочек, то есть оболочек, обладающих ограниченной упругостью, полученная нами формула нижней критической нагрузки может применяться только в случае малой относительной толщины δ/R . Для оболочек сравнительно толстых вопрос о нижней критической нагрузке нельзя рассматривать без учета пластических деформаций.

Экспериментальные данные о величине нижней критической нагрузки в случае оболочек относительно малой толщины действительно близки к значению, полученному нами в расчете*. Для относительно толстых оболочек экспериментальное значение нижней критической нагрузки больше полученного нами. Это объясняется появлением значительных пластических деформаций от местного изгиба, затрудняющих переход оболочки к закритическим деформациям (см. цитированную выше работу автора).

* См. цитированную выше книгу А. С. Вольмира.

§ 6. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДА К ЗАКРИТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В § 4 был изложен метод определения нижней критической нагрузки сжатой цилиндрической оболочки при заданном характере волнообразования в момент потери устойчивости. Этим методом в § 5 было найдено численное значение нижней критической нагрузки в основном случае ($\xi = 1$).

В настоящем параграфе мы подвергнем процесс перехода к закритическим деформациям в результате потери устойчивости основной формы качественному исследованию, не ограничиваясь основным случаем, рассмотренным в § 5.

1. Определение формы поверхности оболочки при закритической деформации

Задача по определению нагрузки, воспринимаемой оболочкой при закритической деформации, сведена нами в § 4 к определению минимума функционала $\bar{J}(\bar{h}, y)$ при условиях

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1, \quad y'(-1) = y'(1) = 0.$$

Сейчас мы, используя некоторые сведения о форме поверхности оболочки при малых деформациях, непосредственно после потери устойчивости, и некоторые сведения, полученные в результате числового расчета основного случая, попытаемся сделать заключение о функции $y(x)$, реализующей минимум функционала \bar{J} .

Функция $y(x)$ в нормированных координатах x, y задает кривую γ на грани призмы, с помощью которой строится поверхность Z , воспроизводящая форму оболочки при закритической деформации (§ 3, 4). Проведем через ось призмы и одно из ее ребер плоскость β . Она будет плоскостью симметрии для Z . Плоскость β пересекает поверхность Z по некоторой кривой $\tilde{\gamma}$, которая является проекцией кривой γ . В соответствующих координатах кривая $\tilde{\gamma}$ задается функцией

$$\tilde{J} = \frac{\pi}{n} y(x).$$

Рассмотрим все данные, которыми мы располагаем о форме кривой $\tilde{\gamma}$ при выпучивании поверхности оболочки.

Непосредственно после потери устойчивости кривая $\tilde{\gamma}$ независимо от характера волнообразования (то есть независимо от n и ξ) является синусоидой. Причем, когда относительное сжатие оболочки увеличивается, изменяется только амплитуда этой синусоиды.

При закритических деформациях в основном случае ($\xi=1$) на участке полупериода $\tilde{\gamma}$ имеет форму кривой, полученной в § 5, составленной из двух парабол и соединяющего их отрезка. Но, что весьма существенно, при увеличении относительного сжатия и при закритических деформациях происходит только изменение амплитуды кривой (§ 5, п. 3).

Выясним, в каком отношении находятся указанные кривые, если задающие их функции нормированы условием

$$\int_{-1}^1 y'^2 = 1.$$

В случае синусоиды $\tilde{\gamma}$

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}.$$

В случае кривой $\tilde{\gamma}$ с параболлами функция $y(x)$ определяется условиями:

$$\begin{aligned} y &= 0,83x \text{ при } 0 \leq x \leq 0,59, \\ y &= 0,83x - (1-x)^2 \text{ при } 0,59 \leq x \leq 1, \\ y(-x) &= -y(x). \end{aligned}$$

На черт. 15 изображены обе кривые. Как видим, кривые очень близки. Это позволяет заключить, что в основном случае форма кривой $\tilde{\gamma}$ примерно сохраняется во все время деформации оболочки и близка к синусоиде. Изменяется только амплитуда этой синусоиды.

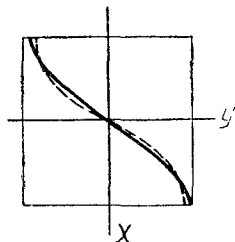


Рис. 15.

Естественно предположить, что и в других случаях, то есть при $\xi \neq 1$, форма кривой $\tilde{\gamma}$ тоже сохраняется, а следовательно, является синусоидой. В дальнейшем мы будем исходить из этого предположения.

2. Энергия упругой деформации

Как показано в § 4, энергия упругой деформации оболочки с точностью до некоторого множителя и слагаемого, не зависящих от \bar{h} , определяется значением функционала

$$J = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\bar{h}\eta y'^2}{3\pi^2(1-\mu^2)\xi^2} + \frac{(2\bar{h})^4 c\xi V\bar{\eta}}{\pi} |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2y'^2}{\xi^2}\right) \right\} dx,$$

где

$$\xi = \frac{b}{a}, \quad \eta = \frac{n^2 \bar{\eta}}{R},$$

а $y(x)$ — нормированная соответствующим образом функция, задающая деформацию поверхности оболочки.

Мы согласились принять

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x.$$

Если эту функцию подставить в выражение функционала J , то он превращается в функцию трех параметров \bar{h} , ξ и η , из которых два последние определяются характером периодичности деформации поверхности.

Как и ранее, мы будем предполагать, что характер периодичности формы деформированной оболочки сохраняется во все время закритической деформации, и поэтому соотношение между параметрами ξ и η

$$\frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2 \eta} = \frac{1}{\sqrt{12(1 - \mu^2)}},$$

имеющее место в момент потери устойчивости (§ 2), должно сохраняться и при закритических деформациях. Это позволяет в выражении J исключить η и перейти к зависимости только от двух параметров \bar{h} и ξ . Именно,

$$J = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{2\bar{h}y'^2}{\pi^3 \sqrt{3(1 - \mu^2)}(1 + \xi^2)^2} + \frac{c(24(1 - \mu^2)\bar{h})^{\frac{1}{4}} \xi^2}{\pi(1 + \xi^2)} |y''|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{\xi^2} y'^2\right) \right\} dx.$$

Для $y(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x$

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_{-1}^1 |y''|^{\frac{1}{2}} dx = 1,53 \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-1}^1 |y''|^{\frac{1}{2}} y'^2 dx = 0,61 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Подставляя эти значения в J и полагая $\mu = 0,3$, получим

$$J = \frac{0,305}{(1 + \xi^2)^2} \bar{h} + \frac{0,162 \bar{h}^{\frac{1}{4}} \xi^2}{1 + \xi^2} + \frac{0,065 \bar{h}^{-\frac{5}{4}}}{1 + \xi^2}.$$

Определим теперь область допустимых значений относительно сжатия \bar{h} . При этом будем пользоваться теми же соображениями, что и в п. 2 § 5. Для ненормированной функции $y(x)$

$$|y(x)| < \frac{a}{2}.$$

Так как нормирующий множитель для y определяется по формуле

$$\mu = \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh},$$

а для $y(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$

$$\max |y(x)| = \frac{2}{\pi},$$

то

$$\frac{4n \sqrt{bh}}{\pi^2} < \frac{a}{2}.$$

Подставляя сюда

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\bar{h}}{b},$$

получим

$$\bar{h} < \frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, при сохранении характера периодичности деформации относительное сжатие \bar{h} не может превосходить $\pi^2/8$. При $\bar{h} = \pi^2/8$ гребни рядом расположенных вмятин приходят в соприкосновение.

3. Состояние равновесия оболочки при закритической деформации

В § 4 для величины нагрузки p , воспринимаемой оболочкой при закритической деформации, мы получили формулу

$$p = E \frac{\delta}{R} \frac{dJ}{d\bar{h}}.$$

В данном случае

$$\frac{dJ}{d\bar{h}} = \frac{0,305}{(1 + \xi^2)^2} + \frac{0,04\xi^2}{(1 + \xi^2)\bar{h}^{\frac{3}{2}}} + \frac{0,08\bar{h}^{\frac{1}{2}}}{1 + \xi^2}.$$

Выясним характер устойчивости состояния равновесия цилиндрической оболочки при закритической деформации. Вопрос об устойчивости равновесия решается знаком выражения

$$\frac{d^2}{d\bar{h}^2} (U - A).$$

Именно, равновесие устойчиво, если это выражение положительно, и неустойчиво, если оно отрицательно.

Так как A линейно относительно \bar{h} и, следовательно,

$$\frac{d^2 A}{d\bar{h}^2} = 0,$$

то устойчивость состояния равновесия зависит от знака $d^2 U/d\bar{h}^2$, то есть от знака $d^2 J/d\bar{h}^2$.

Имеем:

$$\frac{d^2 J}{d\bar{h}^2} = \frac{1}{16(1 + \xi^2) \bar{h}^4} \left(-\frac{0,475\xi^2}{\bar{h}} + 0,325 \right).$$

Отсюда видно, что при малом относительном сжатии \bar{h} состояние равновесия неустойчиво. Экспериментально наблюдаемое явление хлопка объясняется этой неустойчивостью.

Выясним теперь, чему равна нижняя критическая нагрузка p^* .

Так как нагрузка, отвечающая данному осевому сжатию с точностью до множителя, не зависящего от \bar{h} , определяется производной $dJ/d\bar{h}$, то наименьшее ее значение должно находиться из условия $d^2 J/d\bar{h}^2 = 0$, то есть из условия

$$-\frac{0,475\xi^2}{\bar{h}} + 0,325 = 0.$$

Отсюда находим сжатие \bar{h} , отвечающее нижней критической нагрузке:

$$\bar{h} = 1,5\xi^2.$$

Если характер волнообразования при закритических деформациях сохраняется, а мы это предполагаем, то относительное сжатие \bar{h} ограничено условием

$$\bar{h} < \frac{\pi^2}{8}.$$

Отсюда следует, что переход в устойчивое состояние равновесия оболочки в результате хлопка возможен только в том случае, если параметр ξ , характеризующий волнообразование, удовлетворяет условию

$$1,5\xi^2 < \frac{\pi^2}{8},$$

то есть $\xi < 0,91$.

Если же волнообразование в момент потери устойчивости характеризуется большим значением ξ , то переход в устойчивое состояние при хлопке неизбежно связан с изменением характера волнообразования, что сопровождается новыми хлопками. Этим объясняется то, что вмятины на поверхности испытываемых образцов, вытянутые по образующей, наблюдаются очень редко.

Подставляя $\bar{h} = 1,5\xi^2$ в формулу для p , получим величину нижней критической нагрузки

$$p^* = \left(\frac{0,3}{(1 + \xi^2)^2} + \frac{0,12\sqrt{\xi}}{1 + \xi^2} \right) E \frac{\delta}{R}.$$

Так как $\xi < 0,91$, то ее наименьшее значение будет

$$p^* = 0,15E \frac{\delta}{R}.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом. Если при осевом сжатии неограниченно упругой цилиндрической оболочки во все время перехода к закритическим деформациям сохраняется характер волнообразования и оболочка переходит в устойчивое состояние упругого равновесия, то величина воспринимаемой ею нагрузки снижается до величины

$$p^* = 0,15E \frac{\delta}{R}.$$

Определим теперь максимальные напряжения от местного изгиба при закритических деформациях. В основном случае они были вычислены в § 5.

Максимальные напряжения от местного изгиба находятся по формуле (§ 5)

$$\sigma = E \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{3}{2}.$$

Имеем в вершине гребня:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{\lambda^2} y''.$$

Принимая во внимание выражение для λ и μ и замечая, что $\max y'' = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{2\bar{h}}}{\xi^2} \frac{n}{R}.$$

Подставляя выражения ϑ и $\frac{1}{\rho}$ в формулу для σ , при $\xi = 0,91$ и $\bar{h} = 1,5\xi^2$ получим

$$\sigma = 3E \frac{\delta}{R}.$$

Таким образом, для реальной оболочки, обладающей ограниченной упругостью, формулой

$$p^* = 0,15E \frac{\delta}{R}$$

можно пользоваться только в случае малой относительной толщины оболочки (при малом δ/R). Именно, напряжения величиной

$$\sigma = 3E \frac{\delta}{R}$$

не должны вызывать заметных пластических деформаций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр
<i>§ 1. ВВЕДЕНИЕ</i>	3
1. Постановка вопроса	3
2. Метод исследования	4
3. Основные результаты	5
<i>§ 2. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии</i>	7
1. Условие равновесия цилиндрической оболочки при осевом сжатии	7
2. Верхняя критическая нагрузка	10
3. Некоторые экспериментальные данные	13
<i>§ 3. Специальные изометрические преобразования цилиндрической поверхности</i>	16
1. Описание изометрического преобразования цилиндрической поверхности	16
2. Определение некоторых величин для поверхности Z	19
<i>§ 4. Общее исследование закритического упругого состояния сжатой цилиндрической оболочки</i>	23
1. О форме сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации	23
2. Энергия упругой деформации оболочки	26
3. Определение состояния равновесия сжатой цилиндрической оболочки при закритической деформации	29
<i>§ 5. Определение нижней критической нагрузки сжатой цилиндрической оболочки в основном случае</i>	32
1. Определение параметров, характеризующих деформацию оболочки в целом	32
2. Подготовка числового расчета по определению нижней критической нагрузки	35
3. Результаты числового расчета	38

	Стр.
<i>§ 6. Качественное исследование перехода к закритическим деформациям сжатой цилиндрической оболочки</i>	43
1. Определение формы поверхности оболочки при закритической деформации	43
2. Энергия упругой деформации	45
3. Состояние равновесия оболочки при закритической деформации	47

Алексей Васильевич Погорелов

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ
ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

1. Осевое сжатие

Редактор *Т. М. Курилова*
Техн. редактор *Т. М. Смелянская*
Корректор *А. Г. Песчанская*

Сдано в набор 10/VI 1960 г. Подписано к печати 11/I 1962 г.
БЦ 03812. Формат 84×108^{1/32}. Объем: 0,81 бум. л., 1,62 печ. л.,
2 уч.-изд. л. Тираж 3000. Зак. 1392. Цена 24 коп.

Отпечатано с матриц, изготовленных Книжной ф-кой им. Фрунзе
Главполиграфиздата Министерства культуры УССР, в типографии
Издательства Харьковского госуниверситета им. А. М. Горького.
Харьков, Университетская ул., 16.